LES FONCTIONS SINUSOÏDALES

1 DÉFINITION

Une fonction sinusoïdale, généralement de la variable t (temps) s'exprime par:

$$f_1(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou encore} \quad f_2(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \varphi)$$

où:

$\hat{A}$ représente **l'amplitude** de la sinusoïde (on la note également A_m pour A maximum)

ω (oméga) représente **la pulsation** (exprimée en radians par seconde rad/s) proportionnelle à la fréquence $\omega = 2\pi f$ (une fréquence de 50 Hz donne une pulsation de 100 π = 314 rad/s)

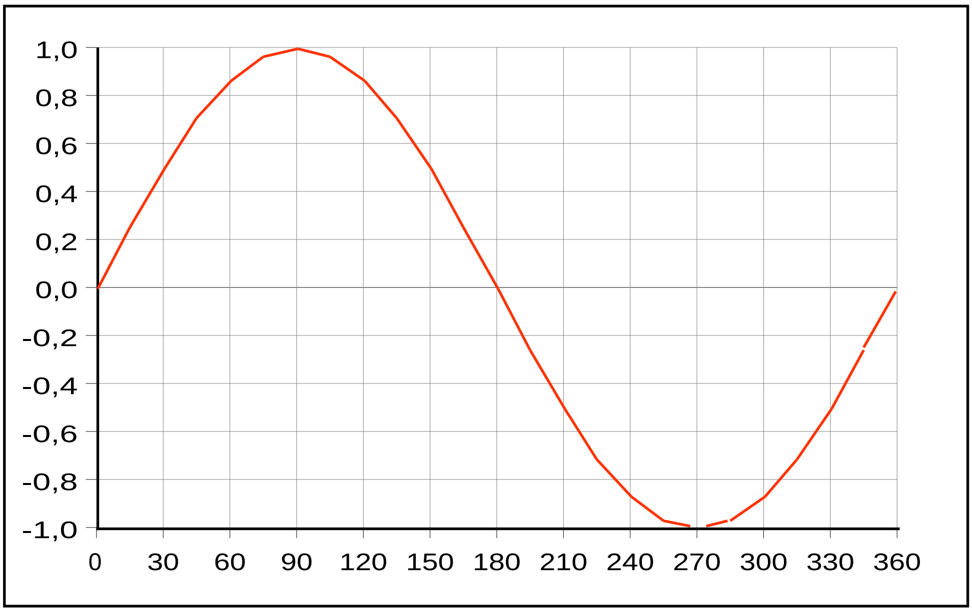
φ (Phi) représente **la phase** à l'origine; elle s'exprime en Radians (rad)
elle peut également se noter Φ (Phi majuscule) ψ (Psy minuscule) ou Ψ (Psy majuscule)

Rque: $(\omega t + \varphi) = \theta$ représente un angle exprimé en **Radians**; il est souvent plus aisé d'exprimer les phases à l'origine en degrés; toutefois il ne faut pas oublier de les convertir en radians avant d'entrer les valeurs dans les formules; pour convertir on doit se souvenir que **360°** (un tour complet de cercle) équivaut à **2π** radians, d'où: $\varphi\ (\text{rad}) = \varphi\ (°) \times 2\pi/360$

On définit **la période T** l'intervalle de temps au bout duquel la fonction se reproduit identiquement à elle-même; on dit alors que la fonction est périodique.
Les fonctions sinus et cosinus sont définies à 2π près, soit 360°
La période angulaire est donc $T_{ang} = 2\pi$ ou **360°**
On en déduit la valeur de la **période temporelle** (exprimée en secondes):

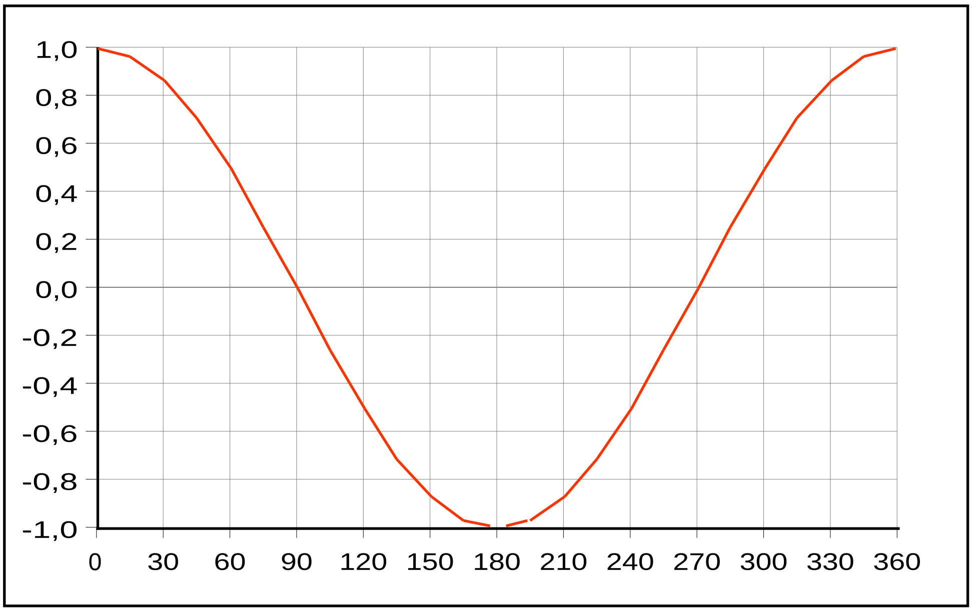
$T_{ang} = 2\pi = \omega T \quad \Rightarrow$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$$



fonction sinus pour $\hat{A} = 1$ et $\varphi = 0$

Les fonctions Sinus (sin) et Cosinus (cos) sont strictement équivalentes; on peut vérifier aisément qu'elles sont seulement décalées dans le temps d'un quart de période, soit d'un angle de $\pi/2 = 90°$



fonction cosinus pour $\hat{A} = 1$ et $\varphi = 0$

Travaux pratiques:

- ouvrir le fichier Excel nommé **Sinus.xls**
- à l'aide des curseurs faire varier les différents paramètres (ampltitude, pulsation, phase) et observer les modifications de formes; (on vérifiera dans les formules du tableau que l'une des courbes est une fonction Sinus et l'autre une fonction Cosinus)
- noter que les courbes restent symétriques par rapport à l'axe des abscisses lorsquent les paramètres varient; on en déduira que les fonctions Sinus et Cosinus ont oujours une valeur moyenne nulle;
- régler les deux sinusoïdes à la même fréquence (même pulsation) et ajuster leurs phases pour que les deux courbes se retrouvent en phase (passage par zéro au même instant); que vaut alors l'écart de phase entre les deux sinusoïdes ? Justifier l'affirmation donnée plus haut que les courbes Sinus et Cosinus sont seulement décalées d'un angle de $\pi/2 = 90°$

2 NOTION DE DÉPHASAGE

Nous avons remarqué que la phase à l'origine d'une sinusoïde correspond à l'avance ou au retard de son passage par la valeur zéro. Cette notion est très relative car elle dépend de l'instant que l'on a choisi comme origine des temps.
Sur un oscilloscope, l'instant du passage par zéro dépend du réglage de la synchro; on peut le modifier à sa convenance.

Par contre l'écart angulaire entre deux sinusoïdes **de même fréquence** correspond à une donnée caractéristique intéressante.
Si on pose $\boldsymbol{\Phi = (\varphi_1 - \varphi_2)}$ le décalage angulaire entre deux sinusoïdes, on remarque que cette valeur ne dépend pas de l'instant choisi pour origine.

On appelle $\boldsymbol{\Phi}$ le déphasage que l'on peut mesurer à l'oscilloscope indépendamment du réglage de synchro.

Pour deux sinusoïdes de même fréquence le déphasage reste constant quel que soit l'instant d'observation.

3 PRODUIT DE SINUSOÏDES: NOTION DE PUISSANCE

La puissance électrique est définie comme le **produit** de l'intensité du courant I(t) par la tension U(t) soit: $I(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$ et $U(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$

d'où: $P(t) = \hat{U}.\hat{I}.\sin(\omega t + \varphi_u).\sin(\omega t + \varphi_i)$

on rappelle les formules de trigonométrie:

```
cos a . cos b = 1/2 [ cos (a+b) + cos (a-b) ]
sin a . sin b = 1/2 [ cos (a-b) - cos (a+b) ]
sin a . cos b = 1/2 [ sin (a+b) + sin (a-b) ]
```

$$P(t) = \tfrac{1}{2}\,\hat{U}.\hat{I}.[\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

on peut remarquer que l'expression entre crochets comporte un terme invariant au cours du temps $[\cos(\varphi_u - \varphi_i)]$ et un terme variable au cours du temps $[\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$ de pulsation 2ω c'est à dire de fréquence **2f**.

si on se souvient que les fonctions sinusoïdales du temps ont une valeur moyenne nulle, on déduit aisément l'expression de la puissance moyenne:

$$P_{moy} = \tfrac{1}{2}\,\hat{U}.\hat{I}.[\cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

en posant $\Phi = (\varphi_u - \varphi_i)$ le déphasage du courant par rapport à a tension: $P_{moy} = \tfrac{1}{2}\,\hat{U}.\hat{I}.\cos\Phi$

soit:

$$\boxed{P_{moy} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\,\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}\cos\Phi = U_{eff}\,I_{eff}\cos\Phi}$$

avec: $U_{eff} = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ $\quad I_{eff} = \dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

qui représentent les valeurs efficaces de la tension et du courant sinusoïdale

Travaux pratiques:

- ouvrir le fichier Excel nommé **Sinus.xls**
- à l'aide des curseurs faire varier les différents paramètres (amplitude, pulsation, phase) et observer les modifications du produit S1*S2
- noter que la courbe S1*S2 est toujours à la fréquence double des deux précédentes (terme en 2ω);
- noter que la valeur moyenne de S1*S2 dépend des amplitudes des deux sinusoïdes S1 et S2 et aussi de leur déphasage;
- on remarquera que la valeur moyenne est maximale lorsque les sinusoïdes sont en phase et qu'elle est nulle lorsqu'elles sont en quadrature (déphasées d'un angle de $\pi/2 = 90°$)

4 VALEUR EFFICACE

La loi d'Ohm appliquée à une résistance pure donne **U = R.I** pour un courant continu.
De même, si on considére un courant alternatif comme une succession d'états pseudo-continus, on peut appliquer la loi d'Ohm aux valeurs instantannées des grandeurs alternatives: U(t) = R.I(t)

Si: $I(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$ alors $U(t) = R.I(t) = R.\hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$

La puissance électrique instantannée s'exprime alors:

$$P(t) = U(t).I(t) = R.\hat{I}^2.\sin^2(\omega t + \varphi_i) = \tfrac{1}{2}\,R.\hat{I}^2.[\cos(0) - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$$

$$P(t) = \tfrac{1}{2}\,R.\hat{I}^2.[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$$

la puissance moyenne vaut donc: $P_{moy} = \tfrac{1}{2}\,R.\hat{I}^2$

on appelle **puissance active** la **puissance moyenne dissipée**

afin d'adopter une notation unifiée pour le courant continu et le courant alternatif, on pose:
$\mathbf{P_{act} = R.I_{eff}^2 = {}^1/_2\ R.\hat{I}^2}$

en identifiant les deux expressions, on déduit: $\mathbf{I_{eff}^2 = {}^1/_2\ \hat{I}^2}$

d'où:

$$\boxed{I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$$

On définit la valeur efficace d'un courant alternatif (ou d'une tension) comme la valeur d'un courant continu équivalent qui produirait dans une même résistance R la même puissance dissipée par effet Joule (échauffement).

L'expression de la valeur efficace donnée ci-dessus ne s'applique qu'au courant alternatif **sinusoïdal** et ne s'applique pas aux autres formes d'ondes (carré, triangle, quelconque).
C'est pourquoi il faut utiliser une autre méthode de calcul dans le cas général.

Les appareils de mesure portant la mention **« TRUE RMS »** indiquent la valeur efficace **VRAIE** calculée par la méthode générale que nous allons expliciter.

RMS veut dire **R**oot **M**edium **S**quare, ce qui se traduit par **R**acine carrée de la **M**oyenne du **C**arré.

On déduit que: $\mathbf{I_{eff}^2 = Moy\ [\ I^2(t)\ ]}$

La valeur moyenne d'une fonction périodique se calcule par l'intégrale suivante:

$$Moy\,[\mathrm{i(t)}] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{i(t)\,dt} \qquad => \qquad Moy\,\left[\mathrm{i^2(t)}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{i^2(t)\,dt}$$

exemples:

courant sinusoïdal:

$\mathbf{I(t) = \hat{I}\ sin\ (\omega t + \varphi_i)}$ =>

$\mathbf{I^2(t) = \hat{I}^2\ sin^2\ (\omega t + \varphi_i) = {}^1/_2\ .\hat{I}^2.\ [\ 1 - cos\ \ (2\omega t + 2\varphi_i)]}$

$\mathbf{I_{eff}^2 = Moy\ [\ {}^1/_2\ .\hat{I}^2.\ [\ 1 - cos\ \ (2\omega t + 2\varphi_i)]\ ] = {}^1/_2\ .\hat{I}^2.\ Moy\ [1 - cos\ \ (2\omega t + 2\varphi_i)]}$

$\mathbf{Moy\ [1] = 1}$ et $\mathbf{Moy\ [cos\ \ (2\omega t + 2\varphi_i)] = 0}$ => $\mathbf{I_{eff}^2 = {}^1/_2\ .\hat{I}^2}$

courant redressé simple alternance:

$\mathbf{I(t) = \hat{I}\ sin\ (\omega t + \varphi_i)}$ pour $0 < t < T/2$ et $\mathbf{I(t) = 0}$ pour $T/2 < t < T$

$\mathbf{I^2(t) = \hat{I}^2\ [\ 1 - cos\ \ (2\omega t + 2\varphi_i)]}$ pour $0 < t < T/2$ et $\mathbf{I^2(t) = 0}$ pour $T/2 < t < T$